

## Serie 11

1. Frau  $A$  und Herr  $B$  wollen sich treffen und verabreden sich für 16 Uhr in einem Café. Mit  $T_A$  bzw.  $T_B$  bezeichnen wir die Differenz zwischen der tatsächlichen Ankunftszeit von  $A$  bzw.  $B$  und 16 Uhr in Minuten. Wenn z.B. das Ereignis  $\{T_A \leq -5\}$  eintritt, so bedeutet dies, dass  $A$  spätestens um 15:55 Uhr ankommt.  $T_A$  und  $T_B$  seien unabhängige Zufallsvariablen. Wir nehmen an, dass  $T_A \sim \mathcal{N}(0, 3)$  und  $T_B \sim \mathcal{N}(-6, 4)$ , wobei  $\mathcal{N}(m, \sigma)$  eine Normalverteilung mit Erwartungswert  $m$  und Varianz  $\sigma^2$  beschreibt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $B$  vor 16 Uhr im Café eintrifft?

Im Folgenden nehmen wir die Tatsache an, dass wenn  $X \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_X)$  und  $Y \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_Y)$  unabhängig sind, dann ist  $X + Y \sim \mathcal{N}(\mu_X + \mu_Y, \sqrt{\sigma_X^2 + \sigma_Y^2})$ .

b) Wie ist  $X = T_A - T_B$  verteilt?

c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft  $A$  vor  $B$  ein?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass  $A$  und  $B$  innerhalb einer Minute ankommen?

e) Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zeit, die die zuerst eintreffende Person auf die andere Person warten muss.

2. Es seien  $X$  und  $Y$  unabhängige  $\mathcal{N}(0, 1)$  - verteilte Zufallsvariablen. Wir definieren die Zufallsvariable  $Z$  durch

$$Z := \text{sign}(Y) \cdot X = \begin{cases} X, & \text{falls } Y > 0, \\ -X, & \text{falls } Y \leq 0. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $Z$ .

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $P[X + Z = 0]$ .

c) Sind  $X$  und  $Z$  unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort durch ein mathematisches Argument.

Wir betrachten ein Rechteck mit zufälligen Seitenlängen  $A$  und  $B$ . Die gemeinsame Dichtefunktion von  $A$  und  $B$  ist gegeben durch

$$f_{A,B}(a,b) := \begin{cases} c(a + b^2), & 0 \leq a, b \leq 1, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

- d)** Bestimmen Sie die Konstante  $c$ .
- e)** Berechnen Sie die Randdichten von  $A$  und  $B$ .
- f)** Sind  $A$  und  $B$  unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort.
- g)** Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Seite  $A$  länger als die Seite  $B$  ist.

**Siehe nächstes Blatt!**

**Verteilungsfunktion  $\Phi$  der Standardnormalverteilung  $\mathcal{N}(0, 1)$ :**

$$\Phi(a) = \int_{-\infty}^a \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.5000	.5040	.5080	.5120	.5160	.5199	.5239	.5279	.5319	.5359
0.1	.5398	.5438	.5478	.5517	.5557	.5596	.5636	.5675	.5714	.5753
0.2	.5793	.5832	.5871	.5910	.5948	.5987	.6026	.6064	.6103	.6141
0.3	.6179	.6217	.6255	.6293	.6331	.6368	.6406	.6443	.6480	.6517
0.4	.6554	.6591	.6628	.6664	.6700	.6736	.6772	.6808	.6844	.6879
0.5	.6915	.6950	.6985	.7019	.7054	.7088	.7123	.7157	.7190	.7224
0.6	.7257	.7291	.7324	.7357	.7389	.7422	.7454	.7486	.7517	.7549
0.7	.7580	.7611	.7642	.7673	.7704	.7734	.7764	.7794	.7823	.7852
0.8	.7881	.7910	.7939	.7967	.7995	.8023	.8051	.8078	.8106	.8133
0.9	.8159	.8186	.8212	.8238	.8264	.8289	.8315	.8340	.8365	.8389
1.0	.8413	.8438	.8461	.8485	.8508	.8531	.8554	.8577	.8599	.8621
1.1	.8643	.8665	.8686	.8708	.8729	.8749	.8770	.8790	.8810	.8830
1.2	.8849	.8869	.8888	.8907	.8925	.8944	.8962	.8980	.8997	.9015
1.3	.9032	.9049	.9066	.9082	.9099	.9115	.9131	.9147	.9162	.9177
1.4	.9192	.9207	.9222	.9236	.9251	.9265	.9279	.9292	.9306	.9319
1.5	.9332	.9345	.9357	.9370	.9382	.9394	.9406	.9418	.9429	.9441
1.6	.9452	.9463	.9474	.9484	.9495	.9505	.9515	.9525	.9535	.9545
1.7	.9554	.9564	.9573	.9582	.9591	.9599	.9608	.9616	.9625	.9633
1.8	.9641	.9649	.9656	.9664	.9671	.9678	.9686	.9693	.9699	.9706
1.9	.9713	.9719	.9726	.9732	.9738	.9744	.9750	.9756	.9761	.9767
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.998650	.998694	.998736	.998777	.998817	.998856	.998893	.998930	.998965	.998999
3.1	.999032	.999065	.999096	.999126	.999155	.999184	.999211	.999238	.999264	.999289
3.2	.999313	.999336	.999359	.999381	.999402	.999423	.999443	.999462	.999481	.999499
3.3	.999517	.999534	.999550	.999566	.999581	.999596	.999610	.999624	.999638	.999651
3.4	.999663	.999675	.999687	.999698	.999709	.999720	.999730	.999740	.999749	.999758
3.5	.999767	.999776	.999784	.999792	.999800	.999807	.999815	.999822	.999828	.999835
3.6	.999841	.999847	.999853	.999858	.999864	.999869	.999874	.999879	.999883	.999888
3.7	.999892	.999896	.999900	.999904	.999908	.999912	.999915	.999918	.999922	.999925
3.8	.999928	.999931	.999933	.999936	.999938	.999941	.999943	.999946	.999948	.999950
3.9	.999952	.999954	.999956	.999958	.999959	.999961	.999963	.999964	.999966	.999967